第３講　微分法・積分法

1　a を正の整数とし，放物線 $y=3x^2$ を C_1，放物線 $y=2x^2+a^2$ を C_2 とする。C_1 と C_2 の二つの共有点を x 座標の小さい順に A，B とする。また，C_1 と C_2 の両方に第１象限で接する直線を ℓ とする。

(1)　B の座標を a を用いて表すと $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}\,a^{\boxed{\text{ウ}}}\right)$ である。

直線 ℓ と二つの放物線 C_1，C_2 の接点の x 座標をそれぞれ s，t とおく，ℓ は $x=s$ で C_1 と接するので，ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{エ}}\,sx-\boxed{\text{オ}}\,s^{\boxed{\text{カ}}}$$

と表せる。同様に，ℓ は $x=t$ で C_2 と接するので，ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{キ}}\,tx-\boxed{\text{ク}}\,s^{\boxed{\text{カ}}}+a^2$$

とも表せる。これらにより，s，t は

$$s=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}\,a,\quad t=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{サ}}}\,a$$

である。

放物線 C_1 の $s\leqq x\leqq\boxed{\text{ア}}$ の部分，放物線 C_2 の $\boxed{\text{ア}}\leqq x\leqq t$ の部分，x 軸，および２直線 $x=s$，$x=t$ で囲まれた図形の面積は

$$s=\frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}-\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\,a^{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

（次ページに続く）

(2)　実数 p，q，r に対し，関数 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ を考える。$f(x)$ は $x=-4$ で極値をとるとする。また，曲線 $y=f(x)$ は点 A，B よび原点を通るとする。

このとき，$p=$ [チ]，$q=$ [ツテト]，$r=$ [ナ] であり，$f(x)$ の極小値は [ニヌネ] である。

また，$a=$ [ノ] $\sqrt{[ハ]}$ であり，曲線 $y=f(x)$ と放物線 C_2 の共有点のうち，A，B と異なる点の座標は ([ヒフ]，[ヘホ]) である。

2　関数 $f(x)=x^3-5x^2+3x-4$ について考える。

(1)　関数 $f(x)$ の増減を調べよう。$f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\boxed{\text{ア}}\,x^2-\boxed{\text{イウ}}\,x+\boxed{\text{エ}}$$

であり，$f(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ で極大値，$x=\boxed{\text{キ}}$ で極小値をとる。よって，

$x\geqq 0$ の範囲における $f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{クケコ}}$ である。

また，方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数は $\boxed{\text{サ}}$ 個である。

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線を ℓ とすると，ℓ の方程式は

$y=\boxed{\text{シ}}\,x-\boxed{\text{ス}}$ である。また，放物線 $y=x^2+px+q$ を C とし，C は点

$(a,\ \boxed{\text{シ}}\,a-\boxed{\text{ス}})$ で ℓ と接しているとする。このとき，p，q は a を用いて

$$p=\boxed{\text{セソ}}\,a+\boxed{\text{タ}},\quad q=a^{\boxed{\text{チ}}}-\boxed{\text{ツ}}$$

と表される。

（次ページに続く）

(3)　(2)の放物線 C は，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲では，x 軸とただ１点 $(\beta,\ 0)$ で交わり，$0 < \beta < 1$ であるとする。このとき，$g(x) = x^2 + px + q$ とおけば

$$g(0)g(1) = a(a + \boxed{\text{テ}})(a - \boxed{\text{ト}})^2 < 0$$

である。$(a - \boxed{\text{ト}})^2$ は負にならないので，a の値の範囲は $\boxed{\text{ナニ}} < a < \boxed{\text{ヌ}}$ であり，$g(0)\ \boxed{\text{ネ}}\ 0$，$g(1)\ \boxed{\text{ノ}}\ 0$ である。ただし，$\boxed{\text{ネ}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$<$　　①　$=$　　②　$>$

放物線 C の $0 \leqq x \leqq \beta$ の部分と，x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S とする。また，C の $\beta \leqq x \leqq 1$ の部分と，x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれた図形の面積を T とする。このとき，a の値によらず，$\displaystyle\int_0^1 g(x)dx = \boxed{\text{ハ}}$ が成り立つ。

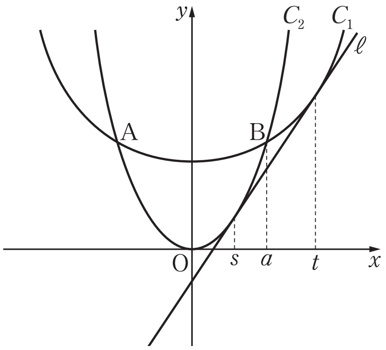
$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪　$S+T$　　①　$\dfrac{S+T}{2}$　　②　$2S+T$　　③　$2T+S$

④　$S-T$　　⑤　$T-S$　　⑥　$2S-T$　　⑦　$2T-S$

したがって，$S = T$ となる a の値を求めると，$a = \dfrac{\boxed{\text{ヒ}} - \sqrt{\boxed{\text{フヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

第３講　微分法・積分法



1 (1)　C_1 と C_2 の方程式を連立して

$3x^2=2x^2+a^2$ より $x^2=a^2$

$a>0$ より $x=\pm a$　　よって $\mathrm{B}(a,\ 3a^2)$

$C_1 : y=3x^2$ において $y'=6x$

よって $x=s$ における C_1 の接線の方程式は

$y=6s(x-s)+3s^2$　つまり $y=6sx-3s^2$

$C_2 : y=2x^2+a^2$ において $y'=4x$

よって $x=t$ における C_2 の接線の方程式は

$y=4tx(x-t)+2t^2+a^2$　つまり $y=4tx-2t^2+a^2$

この２接線が一致するとき $6s=4t$ …①，$-3s^2=-2t^2+a^2$ …②

①より $t=\dfrac{3}{2}s$　これを②に代入して整理すると $s^2=\dfrac{2}{3}a^2$

C_1 と ℓ は第１象限で接するので $s>0$　　よって $s=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$　　このとき $t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$

放物線 C_1 の $s\leqq x\leqq a$ の部分，放物線 C_2 の $a\leqq x\leqq t$ の部分，x 軸，および２直線 $x=s$，$x=t$ で囲まれた部分の面積は

$$\int_s^a 3x^2dx+\int_a^t(2x^2+a^2)dx$$

$$=\Big[x^3\Big]_s^a+\Big[\frac{2}{3}x^3+a^2x\Big]_a^t=a^3-s^3+\left(\frac{2}{3}t^3+a^2t\right)-\left(\frac{2}{3}a^3+a^3\right)$$

$$=-s^3+\frac{2}{3}t^3+a^2t-\frac{2}{3}a^3$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^3+\frac{\sqrt{6}}{2}a^3-\frac{2}{3}a^3=\left(-\frac{2\sqrt{6}}{9}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{2}{3}\right)a^3$$

$$=\frac{7\sqrt{6}-6}{9}a^3$$

(2)　(1)より $\mathrm{A}(-a,\ 3a^2)$，$\mathrm{B}(a,\ 3a^2)$

$f(x)=x^3+px^2+qx+r$ のグラフが原点を通るので，$r=0$

よって $f(x)=x^3+px^2+qx$

また，$y=f(x)$ が点 A，B を通るので

$-a^3+pa^2-qa=3a^2$ …③　　$a^3+pa^2+qa=3a^2$ …④

③＋④より $2pa^2=6a^2$　　$a>0$ より $p=3$

また，$f'(x)=3x^2+2px+q=3x^2+6x+q$ であり，$f(x)$ が $x=-4$ で極値をとることから $f'(-4)=0$　　よって $48-24+q=0$ より $q=-24$

このとき $f(x)=x^3+3x^2-24x$，$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

したがって，$y=f(x)$ は $x=2$ で極小値 $f(2)=8+12-48=-28$ をとる。

また④より，$a^3+3a^2-24a=3a^2$　　$a(a^2-24)=0$　　$a>0$ より $a=2\sqrt{6}$

$y=f(x)$ と $C_2 : y=2x^2+24$ を連立すると

$$x^3+3x^2-24x=2x^2+24$$

$$x^3+x^2-24x-24=0$$

$$(x+1)(x^2-24)=0 \qquad x=-1,\ \pm 2\sqrt{6}$$

したがって，曲線 $y=f(x)$ と放物線 C_2 の共有点のうち，A，B と異なる点の座標は $(-1,\ 26)$

2 (1)　$f(x)=x^3-5x^2+3x-4$ より，$f'(x)=\mathbf{3}x^2-\mathbf{10}x+\mathbf{3}=(3x-1)(x-3)$

よって，$f(x)$ は $x=\mathbf{\frac{1}{3}}$ で極大値，$x=\mathbf{3}$ で極小値をとる.

極小値は $f(3)=-13$ であり，

$f(x)=-13$ より，$x^3-5x^2+3x+9=0 \quad (x+1)(x-3)^2=0 \quad x=-1,\ 3$ である.

したがって，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は，$f(3)=\mathbf{-13}$

また，$f(x)=x^2(x-5)+3x-4$ より，$f\left(\frac{1}{3}\right)<0$

よって，極大値が負であることより，方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数は **1** 個である.

(2)　$f'(0)=3,\ f(0)=-4$ より，

$y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線 ℓ の方程式は，$y=\mathbf{3}x-\mathbf{4}$

放物線 $C : y=x^2+px+q$ と直線 ℓ の接点の x 座標が $x=a$ であるとき，

$x=a$ における C の接線の傾きが直線 ℓ の傾きと一致することから，

$y'=2x+p$ より，$2a+p=3 \qquad$ よって，$p=\mathbf{-2}a+\mathbf{3}$

$x=a$ における C と ℓ の y 座標が一致することから，

$a^2+pa+q=3a-4$，つまり $a^2+(-2a+3)a+q=3a-4$ より，$q=a^2-\mathbf{4}$

(3)　$g(x)=x^2+px+q$ のとき，題意より，

$$g(0)g(1)=q(1+p+q)=(a^2-4)(a^2-2a)=a(a+\mathbf{2})(a-\mathbf{2})^2<0$$

$(a-2)^2 \geqq 0$ より，$a(a+2)<0 \qquad$ よって，$\mathbf{-2}<a<\mathbf{0}$ であり，

$g(0)<0$ (⓪)，$g(1)>0$ (②) である.

また，題意の面積 S と T について，

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^{\beta} g(x)dx+\int_{\beta}^1 g(x)dx=T-S \quad (⑤)$$

$S=T$ のとき，$T-S=0$ つまり $\int_0^1 g(x)dx=0$

$$\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{p}{2}x^2+qx\right]_0^1=0 \qquad \frac{1}{3}+\frac{p}{2}+q=0$$

よって，$\frac{1}{3}+\frac{-2a+3}{2}+a^2-4=0 \qquad 6a^2-6a-13=0$

$-2<a<0$ より，$a=\mathbf{\frac{3-\sqrt{87}}{6}}$